

# Комплексни числа в геометрията

Калина Николова

## УВОД В КОМПЛЕКСНИТЕ ЧИСЛА

### **Комплексно число**

Дефиниция 1: Комплексно число е число, което може да бъде представено под формата  $a+ib$ , където  $a$  и  $b$  са реални числа, а  $i$  е имагинерната единица, за която е вярно уравнението  $i^2 = -1$ . Наричаме  $a$  реална част, а  $b$  – имагинерна част.

$$z = a + ib, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$a = \operatorname{Re} z$$

$$b = \operatorname{Im} z$$

Следствие: Можем да представим реалните числа като комплексни с имагинерна част 0. (Тоест  $a = a + 0 \cdot i$ ,  $a \in \mathbb{R}$ )

Дефиниция 2: Комплексно число  $z = (a, b)$  можем да дефинираме и като наредена двойка от реални числа  $a$  и  $b$ .

Следствие: Две комплексни числа  $z_1 = (a_1, b_1)$  и  $z_2 = (a_2, b_2)$  равни  $\Leftrightarrow a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$ .

Множеството на комплексните числа се бележи с  $\mathbb{C}$ , тоест  $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ .

### **Аритметични свойства на комплексните числа**

Ще разгледаме две комплексни числа  $z_1 = a_1 + ib_1$ ,  $z_2 = a_2 + ib_2$  и  $z_3 = a_3 + ib_3$  (или  $z_1 = (a_1, b_1)$ ,  $z_2 = (a_2, b_2)$  и  $z_3 = (a_3, b_3)$ ):

Събиране / изваждане:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right)$$

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ , комутативност при събиране;
- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ , асоциативност при събиране;
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$ , комутативност при умножение;

- $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  , асоциативност при умножение;
- $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$  , дистрибутивност.

Дефиниция: **Комплексно спрегнато** на дадено число  $z = a + ib$  ,  $z \in \mathbb{C}$  наричаме число с равна реална част и равна имагинерна част, взета с обратен знак. Означаваме:

$$\bar{z} = a - ib$$

Свойства:

- $\bar{\bar{z}} = z$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

Дефиниция: **Абсолютна стойност (модул)** на дадено число  $z = a + ib$  ,  $z \in \mathbb{C}$  се дефинира като:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Свойства:

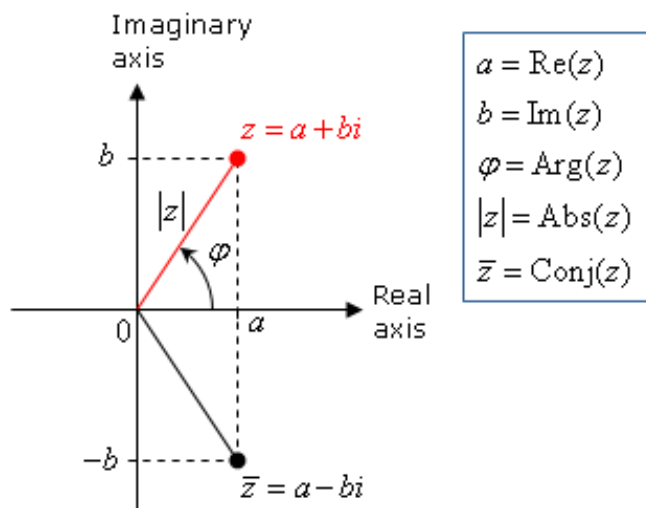
- $|z|^2 = z \bar{z}$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- $|z_1 \cdot z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n|$  ,  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$
- $|z| = |\bar{z}|$  ,  $z \in \mathbb{C}$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1| = |z_2| = 1$  и  $z_1 z_2 \neq -1 \Rightarrow \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$
- $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$  ,  $z_i \in \mathbb{C}$

- $\left| \sum_{i=1}^n z_i w_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n |z_i|^2 \sum_{i=1}^n |w_i|^2$  - Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц за комплексни числа

Пример: Ако  $w$  е корен на полинома  $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ , то и  $\bar{w}$  е корен на  $P(z)$ .

### Геометричен вид на комплексните числа

Комплексното число  $z = a + bi$  може да бъде представено в координатна система като точка  $A$  с координати  $(a, b)$ .



Можем да разширим едномерното понятие за реална ос (числова права) до двумерна комплексна равнина. Тя се дефинира чрез две оси, които се пресичат под прав ъгъл в  $O(0,0)$  точката:

- Реална ос (хоризонтална) –  $\text{Re}$
- Имагинерна ос (вертикална) –  $\text{Im}$

Така абсолютната стойност на  $z$  съответства на разстоянието от точката  $A(a, b)$  до точката  $O(0,0)$ :

$$|z| = d(A, O) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Комплексно спрегнатото на  $z$  –  $\bar{z}$ ,

съответства на точката  $B(a, -b)$ , симетрична на  $A$  спрямо реалната ос.

Наблюдаваме, че  $z$  и  $\bar{z}$  са симетрични спрямо центъра на координатната система –  $O(0,0)$ .

**Радиус-вектор:** вектор с начало центъра на координатната система и край – произволна точка.

Тоест на дадено комплексно число  $z$  можем да съпоставим както и точка  $A(a, b)$ , така и радиус-вектора  $\vec{OA}$ , с начало  $O(0,0)$  и край  $A(a, b)$ .

Има биекция между множеството от радиус-векторите и точките в равнината  $\Rightarrow$  има биекция и между множеството на радиус-векторите и  $\mathbb{C}$ . Тоест свойствата на радиус-векторите важат и за комплексните числа – събиране, изваждане абсолютна стойност и т.н.

**Разделяне на отсечка в дадено отношение:** Нека  $A$  и  $B$  са дадени точки, съответстващи на комплексните числа  $z_1$  и  $z_2$  съответно. Нека  $C$  е точка от отсечката  $AB$ , разделяща я в отношение

$\lambda: \mu \neq -1$  или  $\mu \vec{AC} = \lambda \vec{CB}$ . Тъй като  $\vec{AC} = z - z_1$  и  $\vec{CB} = z_2 - z$ , то  $\mu(z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$ . Тоест

комплексното число, съответстващо на  $C$  е  $c = \frac{\lambda z_2 + \mu z_1}{\lambda + \mu}$ . Ако  $\lambda : \mu = 1$ , то  $c = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , съответства на  $C$  – средата на отсечката  $AB$ .

**Задача:** Нека  $ABCD$  е четириъгълник и нека точките  $M, N, P, Q, K, L$  са среди на отсечките  $AB, BC, CD, DA, BD, CA$  съответно. Докажете, че  $MN, NQ, KL$  се пресичат в една точка  $T$ , която разполовява всяка от тях.

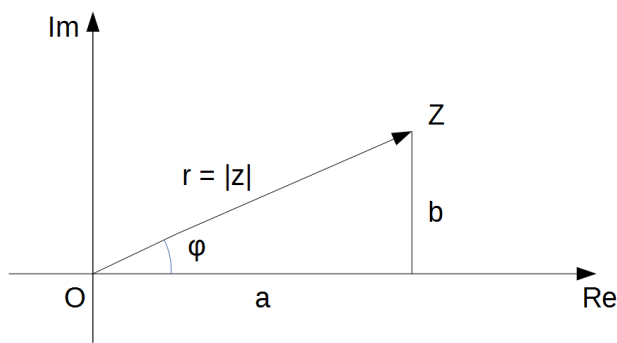
**Упътване:** Представете точките на четириъгълника като комплексни числа в комплексната равнина. Изразете средите на страните и диагоналите. Разгледайте средите на отсечките  $MN, NQ, KL$  и докажете, че са една и съща точка (едно и също комплексно число).

**Пример:** Геометричното място от точки  $z$ , които удовлетворяват уравнението  $|z - z_0| = R$  е окръжност с център  $z_0$  и радиус  $R$  ( $|z - z_0|$  е разстоянието между две точки, чиито съответни комплексни числа са съответно  $z$  и  $z_0$ ).

**Пример:** Геометричното място от точки  $z$ , които удовлетворяват уравнението  $|z - z_1| = |z - z_2|$  е множеството от точки, равноотдалечени от  $z_1$  и  $z_2$ . Тоест  $|z - z_1| = |z - z_2|$  е уравнението на симетрала на отсечка, с краища съответстващи на  $z_1$  и  $z_2$ .

**Задача:** Намерете геометричното място от точки, които съответстват на комплексното число  $z$ , удовлетворяващо условието  $|2z| \geq |1 + z^2|$ .

### Тригонометричен вид на комплексните числа



Вече показахме, че между радиус-векторите и комплексните числа има биекция. Сега нека представим  $z = a + ib$  като радиус-вектора  $\vec{OZ}$ . Нека  $\vec{OZ}$  сключва ъгъл с мярка  $\varphi$  с положителната част на реалната ос. Ще наричаме  $\varphi$  аргумент на комплексното число  $z$  и ще означаваме с:

$$\varphi = \text{Arg } z$$

Аргументът може да е положителен или отрицателен в зависимост от ориентацията на ъгъла  $\varphi$  (положителен, ако  $\varphi$  е ориентиран обратно на часовниковата стрелка; отрицателен, ако  $\varphi$  е ориентиран по часовниковата стрелка). Когато  $z = 0$  аргументът не е дефиниран, затова ще считаме, че  $z \neq 0$ .

Положението на точката  $z$  еднозначно се дефинира чрез декартови координати –  $(a, b)$ , както и чрез полярни координати –  $r = |z|$  и  $\varphi = \text{Arg } z$ . Ще разгледаме как се представя  $z$  чрез аргумента и абсолютната си стойност:

$$a = r \cos(\varphi), \quad b = r \sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow z = a + ib = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi) = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ , където абсолютната стойност е еднозначно дефинирана, а  $\varphi$  се дефинира еднозначно в интервал с дължина  $2\pi$ . Аргумент, удовлетворяващ условието

$0 < \text{Arg } z \leq 2\pi$  се нарича *главен аргумент* на  $z$  и се означава с  $\arg z$ . Всеки друг аргумент на  $z$  може да се получи чрез прибавяне на  $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

*Тригонометрично представяне на комплексно число:*

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

*Следствие:*

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2)) \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\arg(z_1 z_2)) + i \sin(\arg(z_1 z_2))) \quad (2)$$

$$(1) \text{ и } (2) \Rightarrow \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Аналогично } \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

*Ъгъл между прави  $a$  (през точки  $A_1$  и  $A_2$ ) и  $b$  (през точки  $B_1$  и  $B_2$ ):*

$$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{B_1 B_2}) = \arg \overrightarrow{A_1 A_2} - \arg \overrightarrow{B_1 B_2} = \arg(a_1 - a_2) - \arg(b_1 - b_2) = \arg \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$$

*Формула на Моавър:*  $z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \arg z) + i \sin(n \cdot \arg z))$

*Забележка:* Може да се докаже по индукция, използвайки горното свойство

*Задача:*

Намерете:

- |  |               |
|--|---------------|
| a) $(-1 + i\sqrt{3})^9 - (1 + i\sqrt{3})^9$  | Отг. $2^{10}$ |
| b) $(1 - i\sqrt{3})^3 (1 + i)^{10}$  | Отг. $-256i$  |
| c) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1990} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1990} + \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1994} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1994}$ | Отг. $2^{10}$ |
| d) $z^{158} + z^{152} + \frac{2}{z^{122}}, \text{ ако } z + \frac{1}{z} = 1$   | Отг. $-2$     |

***Корен от комплексно число:***

Нека  $z \neq 0$  е комплексно число и  $n$  е естествено число. *Корен  $n$ -ти* от  $z$  се дефинира като такова комплексно число  $w$ , където:

$$w^n = z$$

Означаваме  $w = \sqrt[n]{z}$

Прилагаме Формулата на Моавър:

$$z^n = |z|^n (\cos(n \cdot \arg z) + i \sin(n \cdot \arg z)) \text{ и тригонометричните представяния:}$$

$$z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)) \quad w = |w|(\cos(\arg w) + i \sin(\arg w))$$

$$w^n = |w|^n (\cos(n \cdot \arg w) + i \sin(n \cdot \arg w)) = z = |z|(\cos(\arg z) + i \sin(\arg z))$$

$$\Rightarrow |w|^n = |z|, \quad n \cdot \arg w = \arg z + 2k\pi$$

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg w = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}$$

$$\text{Тоест } w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

При  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  получаваме  $n$  различни комплексни корена, след което корените започват да се повтарят. Тоест имаме периодичност, която ни дава точно  $n$  различни комплексни корена.

Задача: Намерете  $\sqrt[3]{27i^5}$

$$\text{Отг. } 3 \left( \cos \frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{6} \right), \quad k=0,1,2$$

Задача: Докажете, че всички комплексни числа  $a$  и  $b$  удовлетворяват равенството

$$2(|a| + |b|) = |a+b-2\sqrt{ab}| + |a+b+2\sqrt{ab}|, \text{ където } \sqrt{ab} \text{ е един от двата корена на } ab$$

Задача: Докажете, че всички комплексни числа  $a$  и  $b$  удовлетворяват равенството

$$|a+b| + |a-b| = |a+\sqrt{a^2+b^2}| + |a-\sqrt{a^2+b^2}|, \text{ където } \sqrt{a^2+b^2} \text{ е един от двата корена на } a^2+b^2$$

Задача: Решете уравнението  $(x+i)^n + (x-i)^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$

$$\text{Отг. } x = \cot g \frac{\pi + 2k\pi}{2n}$$

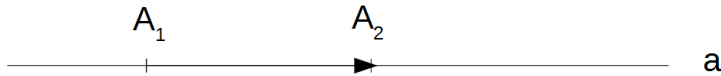
Задача: Дадени са три еднакви квадрата  $ABCD, BEFC, EPQF$ . Да се докаже, че

$$\sphericalangle ACD + \sphericalangle AFD + \sphericalangle AQD = \frac{\pi}{2}$$

## КОМПЛЕКСНИ ЧИСЛА В ГЕОМЕТРИЯТА

### Успоредност и перпендикулярност

#### 1. Успоредност на правите $a$ и $b$

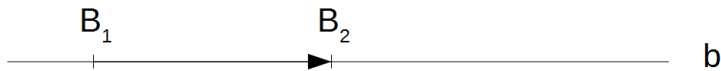


$$a \parallel b \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_2} \parallel \overrightarrow{B_1 B_2}$$

$$\Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{B_1 B_2}) = 0 \text{ или } \pi$$

Нека комплексните числа

$a_1, a_2$  и  $b_1, b_2$  съответстват на точките  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$ .

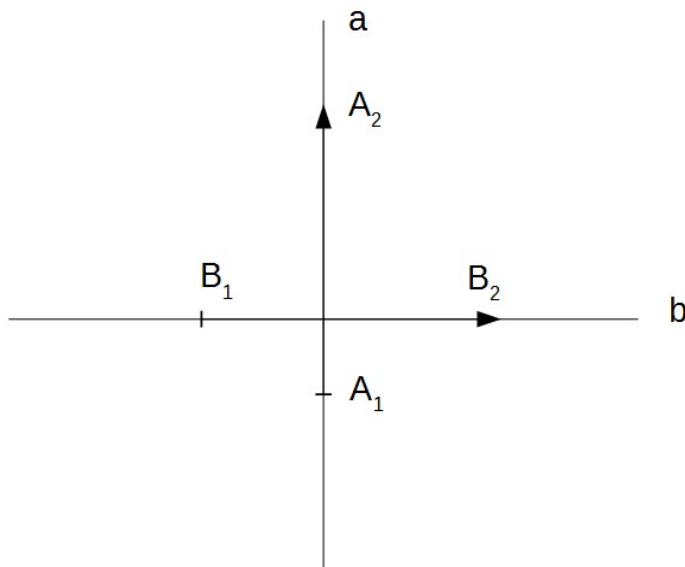


$$a \parallel b \Leftrightarrow \arg \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \{0, \pi\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \overline{\left( \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \right)} \Leftrightarrow (a_1 - a_2)(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) - (\bar{a}_1 - \bar{a}_2)(b_1 - b_2) = 0$$

#### 2. Перпендикулярност на правите $a$ и $b$



$$a \perp b \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1 A_2} \perp \overrightarrow{B_1 B_2}$$

$$\Leftrightarrow \angle(\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{B_1 B_2}) = \frac{\pi}{2} \text{ или } \frac{3\pi}{2}$$

Нека комплексните числа

$a_1, a_2$  и  $b_1, b_2$  съответстват на точките  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$ .

$$a \perp b \Leftrightarrow \arg \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \in \text{Im}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} = -\overline{\left( \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} \right)} \Leftrightarrow$$

$$(a_1 - a_2)(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) + (\bar{a}_1 - \bar{a}_2)(b_1 - b_2) = 0$$